

# Simple Dynamic Programming

Picks

清华大学 交叉信息研究院

January 14, 2017

## set

- 有 $N$ 个数，A从中取走任意多个数(可不取)，B之后再取。
- 问有多少种情况，使得A取走的数的异或和大于B取走的数的异或和。
- $N, a_i \leq 1000$

## set

- 注意到A、B对称。
- 只需要考虑异或和相等的情况。
- 令 $f_{i,j}$ 为到 $i$ 位置，AB异或和为 $j$ 的方案数，枚举第 $i$ 位置给谁即可。

# The Animal Programming Competitions (TCO2012 Semifinal2)

- 有  $N$  个四人队伍，每个队伍有个礼品，礼品两两不同，人两两不同。
- 每个队伍要把自己队伍的礼品送给别的队伍，且每一个人最多获得一个礼品。
- 求方案数。
- $N, \sum_i R_i \leq 1000, R_i \leq 10$

# The Animal Programming Competitions (TCO2012 Semifinal2)

- 状态:  $f_{i,j,k}$  表示前  $i$  个队伍, 有  $j$  个礼物没有送出, 且还有  $k$  个人没有拿到礼物。
- 转移显然。
- 注意到  $k$  可以由  $i, j$  唯一确定, 故可以丢掉第三维。

## OneBlack(TCO2013 Semifinal2)

- 一个  $n \times m$  的网格图，一些格子有障碍。一条从左上到右下的合法路径为仅向右、下走，不经过障碍的路径。
- 一个合法染色为：染黑一些格子，使得每一条合法路径上有且仅有一个染黑的格子。
- 问合法染色方案数。
- $N \leq 1000$ .

## OneBlack(TCO2013 Semifinal2)

- 注意到一个合法染色方案实际上是原图的一个极小割。
- 建出对偶图，则任意一条简单路对应一个合法方案。
- 简单DP一下就能得到方案数。

## 卡农(HNOI2011)

- 一个合法的01串集为：一共有 $M$ 个串，每个串长为 $N$ ，每一位恰有偶数个1。
- 问有多少个合法的01串集。
- $N, M \leq 10^6$ .



## 卡农(HNOI2011)

- 先有序化, 令  $f_i$  为选出  $i$  个合法串的方案数。
- 前  $i - 1$  个串任意定, 则第  $i$  个串被唯一确定。
- 去掉第  $i$  个串和之前重复的即可。
- $f_i = \binom{2^N}{i} - f_{i-1} - f_{i-2} \times (2^{N-1} - (i - 2)) \times (i - 1)$ .

# 方格取数(2013年集训队答辩王康宁)

- 给一个矩阵,  $(i, j)$ 位置的权值为 $A_i * B_j$ , 每次询问从 $(x_1, y_1)$ 到 $(x_2, y_2)$ 只往右、下走的最小权值和。
- $A, B$ 随机生成。
- $N, T \leq 10^5$ .

## 方格取数(2013年集训队答辩王康宁)

- $N^2$ 做法显然。
- 仅考虑A, 考虑一个点成为拐点的必要条件, 可得为它大于左方所有点或大于右方所有点。
- 随机数据下, 这样的点至多 $O(\log N)$ 个。
- 预处理出所有可能拐点, 暴力DP即可。

## StringSequence(TCO2012 Wildcard)

- 给出两个串A, B。每次可以往A中插入一个字符。
- 将每次操作后的A串记为一个序列。
- 求从A串变为B串的不同序列数量。
- 串长不超过100.

## StringSequence(TCO2012 Wildcard)

- 考虑如何从空串生成出B。
- 任意插入。重复序列产生：B串子序列出现连续相等的子串。
- 令 $f_{l,r}$ 表示在 $[1,l), [r,n]$ 已经产生了的情况下，填上 $[l,r)$ 的方案数。
- 只需让下一步插入的字符不等于 $B[r]$ 即可。转移显然。
- 从A串生成B，考虑 $g_{i,j}$ 表示用A的前 $i$ 个字符生成出B的前 $j$ 个字符的方案数，利用 $f$ 完成转移。

## 外星人(UR 1)

- 有 $N$ 个门，形如输出该门输入数据对 $a_i$ 取模得结果。
- 你需要将这 $N$ 个门排成一个序列。
- 当输入为 $x$ 时，求最大的输出信号。在此基础上，求得到最大的输出信号得序列总数。
- $N, x, a_i \leq 1000$ .

## 外星人(UR 1)

- 注意到当目前输入为 $x$ 时，所有大于 $x$ 的门都对它没有意义。
- 令 $f_{i,j,k}$ 表示考虑完放第 $i$ 个位置，目前输入为 $j$ ，还有 $k$ 个门的 $a_i$ 比 $x$ 要大。
- 可以发现 $i$ 没有意义。同时， $k$ 的枚举可以通过组合数完成。
- 最终可以写出关于 $j$ 的转移。

## 管道取珠(NOI2009)

- 有两个栈，里面有黑白两色球。你可以每次选一个栈弹出栈顶，直到两个栈都空为止，这样可以产生一个序列。
- 显然，有一些方法会产生相同的序列。设对序列 $S$ ，有 $a_S$ 种生成方法。
- 求 $\sum_S a_S^2$ .



## 管道取珠(NOI2009)

- 视为两个人在一起取，则两个人取出同一个序列的不同取法总数即为所求。
- 令  $f_{i,j,k}$  为取了  $i$  个球，第一个人从栈A中取  $j$  个，第二个人从栈A中取  $k$  个的方案数。

## 国王饮水记(NOI2016)

- 有 $N$ 个互不相同的整数，每次可以任取 $K$ 个数将它们变成它们的平均值。
- 你可以进行至多 $M$ 次操作。
- 求第一个数最大变为多少。要求高精度小数 $P$ 位。
- $N \leq 50000, P \leq 1000$

# 国王饮水记(NOI2016)

- 显然法。

## DistanceGraph(TCO2012 Final)

- 给出一个无向联通图，要给所有顶点标号，任意两个顶点标号不同。
- 要求图中两点有连边当且仅当两点标号差不超过 $D$ 。
- 问标号方案数。
- 点数、标号最大大小不超过50， $D \leq 5$ 。

## DistanceGraph(TCO2012 Final)

- 对于一个已经标好号的图，显然可以拍平成一个序列。
- 每一个点的连边成为序列上的一个区间，由三角不等式，区间单增。
- 注意到一个图对应的本质不同的序列仅会有一个：考虑从图生成出序列，当已经放下前 $k$ 个点之后，第 $k+1$ 个点向前 $k$ 个点连边必需是最多的，且向后 $n-k-1$ 个点的连边必需是最少的。
- 若由两个点都满足，且他们的连边不相同，显然是不可能的。若两个点都满足且连边相同，则它们没有区别。

## DistanceGraph(TCO2012 Final)

- 则我们可以构建出唯一的区间列等价于原图，问题转为：给出一个单增区间列，给他们打递增的标号，使得一个点与它覆盖的区间内的所有点标号差不超过 $D$ ，不覆盖的点标号差大于 $D$ 。
- 状压DP一下就行了。

## luck(2013年集训队第二次作业高胜寒)

- 在 $1 \sim N$ 以内, 有多少数包含连续 $K$ 个4或连续 $K$ 个7。
- $\lg N, K \leq 10^6$ .

## luck(2013年集训队第二次作业高胜寒)

- 数位DP，转为求不包含连续 $k$ 个4和连续 $k$ 个7数的数量。
- 假如 $k$ 不大，显然可以利用AC自动机的fail指针构建一个转移矩阵进行加速。
- 设 $g_{i,j,k}$ 为第 $i$ 位 $j$ 数字匹配了 $k$ 位的方案是 ( $j$ 为0,1,2, 表示其余,4,7三种数字):

$$g_{i,0,0} = g_{i-1,0,0} + \sum_d g_{i-1,1,d} + \sum_d g_{i-1,2,d}$$

$$g_{i,1,1} = g_{i-1,0,0} + \sum_d g_{i-1,2,d}$$

$$g_{i,s,k} = g_{i-1,s,k-1} (s = 1, 2, k > 1)$$

- 注意到上式中的变换与答案中 $\sum_k g_{i,j,k} (j > 0)$ 都是单独出现的，且 $j=1$ 与 $j=2$ 是等价的。



## luck(2013年集训队第二次作业高胜寒)

- 所以设  $f_i = g_{i,0,0}$ ,  $h_i = \sum_d g_{i,1,d}$ .
- $h_i = h_{i-1} - g_{i-1,1,k-1} + g_{i,1,1}$ , 而  $g_{i-1,1,k-1}$  源于某个  $g_{s,1,1}$ , 将  $s$  算出为  $i - k$ .
- 这样便可以得到递推关系:

$$f_i = 8 * (f_{i-1} + 2 * h_{i-1})$$

$$h_i = f_{i-1} + 2 * h_{i-1} - f_{i-k} - h_{i-k}$$

## jas(POI 2004)

- 有一棵树，A选择一个点埋一个宝藏，B每次选择一个点，A告诉B宝藏在这个点的哪个方向。
- B希望询问尽可能少。
- 问B在最坏情况下询问是多少次。
- $N \leq 1000$ . (原题为 $N \leq 10^5$ )

## jas(POI 2004)

- 将问题转化为：对每一个点进行整数标号，要求两个相同标号点的路径上至少有一个点大于它们的标号。问最小的最大标号是多少。
- 树形DP，令  $f_{i,S}$  为以  $i$  为根的子树， $S$  为标号集，是否可以合法。若  $S_j$  为 1，则在子树中有一个标号为  $j$  的点到  $i$  的路径上没有大于  $j$  的标号的点。
- 由树分治复杂度分析， $|S| \leq \log_2 N$ 。
- 可以改为贪心，在此不提。